# ANÁLISIS MATEMÁTICO II
**Examen Final 03/12/2024**

UTN.BA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

**APELLIDO DEL ALUMNO: .............................................. NOMBRE: ...................................**

**CORRIGIÓ: ......................................................... REVISÓ: .......................................................**

| T1 | T2 | P1 | P2 | P3 | P4 | CALIFICACIÓN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
***No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas***
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

---

**T1 - a)** Enuncie la Regla de la Cadena en forma matricial, incluyendo hipótesis correspondientes.

**b)** Sea $F(x;y;z) = \phi(\frac{z}{x\,y})$ , $\phi \in C^1, x\,y \neq 0$, demuestre que: $x\,F'_x + y\,F'_y + 2\,z\,F'_z = 0$

**T2** - a) Deduzca una fórmula para el cálculo de área plana, aplicando el teorema de Green, explicitando sus hipótesis.

b) Siendo $Df = \begin{pmatrix} 6xy+1 & 3x^2+3 \\ 3x^2 & 2y \end{pmatrix}$ la matriz jacobiana de f , **calcule** la circulación de f a lo largo de la frontera del triángulo de vértices (–1,0), (2,0), (0,3) recorrida en sentido positivo.

P1- **Exprese,** mediante una integral múltiple, la masa del sólido $H \subset \Re^3$ definido por:
$z \leq 4 - x^2 - y^2$ ; $y \geq x$ ; $x^2 + y^2 \geqslant 2$ ; en el primer octante ; siendo la densidad en cada punto proporcional a la distancia al eje z .

P2 **-** Dada la superficie S de ecuación: $1 - x^2 - 3xz + y^2 - \ln z = 2$ **halle** , si es posible, los puntos donde el plano tangente a S en el punto $(0; 1; z_0)$, corta a la curva C definida por las ecuaciones: $y = x^2$ ; $z = 1 - 3x$.

P3 **-** Dado $\bar{f}(x;y;z) = (y\,; \cos(z) + x\,;\ z - 2xy)$ **, calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la porción de superficie: $z = 4 - x^2$ con $y \geq x$ , $4 - x \geq y$ , en el primer octante, con normal de tercera componente positiva

P4 –Dadas las familias de curvas de ecuaciones: $y = k\,x^4 \;\wedge\; \varphi(x) + \mathbf{b}\,y^2 = C$ **; halle** el valor del parámetro "**b**" de modo que ambas familias resulten ortogonales, sabiendo que φ(x) es la curva solución de $y'' - y' = 2 - 2x$ que pasa por el origen, con $y'(0) = 0$ .

**T1** a) Enunciar la regla de la cadena en forma matricial incluyendo hipótesis correspondientes

$\bar{g}: D_1 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable en $\bar{A}$

$F: D_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{g}(\bar{A})$

Entonces $h = f \circ \bar{g}$ es diferenciable en $A$ y

$$Dh(\bar{A}) = Df_{(\bar{g}(A))} \, D\bar{g}(A)$$

b) Sea $F(x,y,z) = \phi\left(\frac{z}{xy}\right)$, $\phi \in C^1$, $xy \neq 0$, demostrar que:

$$xF'_x + yF'_y + 2zF'_z = 0$$

$\phi \in C^1 \Rightarrow \phi$ es diferenciable $\Rightarrow F$ es diferenciable

Sea $g(x,y,z) = \frac{z}{xy} \to F(x,y,z) = \phi(g(x,y,z))$

$F$ dif $\Rightarrow DF_{(x,y,z)} = D\phi_{(g(x,y,z))} \cdot Dg(x,y,z)$

$$g(x,y,z) = \frac{z}{xy} \to \begin{cases} g'_x = \frac{-z}{x^2y} \\ g'_y = \frac{-z}{xy^2} \\ g'_z = \frac{1}{xy} \end{cases} \to Dg = \begin{bmatrix} \frac{-z}{x^2y} & \frac{-z}{xy^2} & \frac{1}{xy} \end{bmatrix}$$

$$DF_{(x,y,z)} = \phi' \cdot \begin{bmatrix} \frac{-z}{x^2y} & \frac{-z}{xy^2} & \frac{1}{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{-z\phi'}{x^2y}}_{F'_x} & \underbrace{\frac{-z\phi'}{xy^2}}_{F'_y} & \underbrace{\frac{\phi'}{xy}}_{F'_z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow xF'_x + yF'_y + 2zF'_z = \cancel{x}\left(\frac{-z\phi'}{x^{\cancel{2}}y}\right) + \cancel{y}\left(\frac{-z\phi'}{xy^{\cancel{2}}}\right) + 2z\frac{\phi'}{xy}$$

$$= \frac{-z\phi'}{xy} + \left(\frac{-z\phi'}{xy}\right) + \frac{2z}{xy}\phi' = 0$$

T2 a) Deducir una fórmula para el cálculo de área plana aplicando el teorema de Green, explicitando sus hipótesis

Sea D una región de $\mathbb{R}^2$, compacta, cuyo borde es C con $\bar{F} \in C^1 \Rightarrow$ por T. Green : $\oint_{C+} \bar{F} d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dxdy$

$\bar{F} = (P, Q)$

Si hallo un campo vectorial tal que $Q'_x - P'_y = 1$ obtengo el área de D pues:

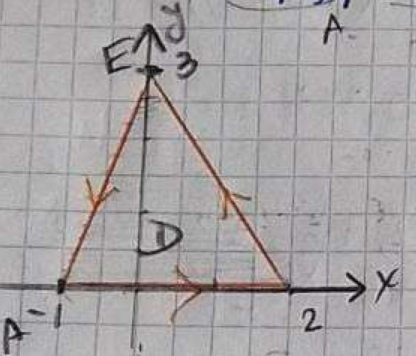
$$\oint_{C+} \bar{F} d\bar{e} = \underbrace{\iint_D dxdy}_{\text{Área } D}$$

$Q'_x - P'_y = 1$

elijo $Q'_x = 1 \rightarrow Q(x,y) = x \rightarrow \boxed{\bar{f}(x,y) = (0, x)}$

$P'_y = 0 \rightarrow P(x,y) = 0$

b) Siendo $Df = \begin{array}{cc} & P'_y \\ & \begin{pmatrix} 6xy+1 & 3x^2+3 \\ 3x^2 & 2y \end{pmatrix} \\ Q'_x & \end{array}$ la matriz jacobiana de f, calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la frontera del triángulo de vértices $\underset{A}{(-1,0)}$, $\underset{B}{(2,0)}$, $\underset{E}{(0,3)}$ recorrida en sentido positivo



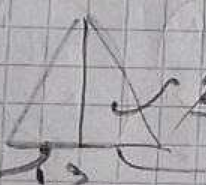

Se cumplen las hip. T. Green ∴

$$\oint_{C+} \bar{F} d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dxdy =$$

$$= \iint_D 3x^2 - (3x^2+3) \, dxdy =$$

$$= -3 \underbrace{\iint_D dxdy}_{\text{Área } D} = -3 \cdot \frac{9}{2}$$

$$\boxed{\oint_{C+} \bar{F} d\bar{e} = \frac{-27}{2}}$$



$\frac{2 \cdot 3}{2}$ base = 2

base = 1 $\frac{1 \cdot 3}{2}$

Área $= \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$

h = 3

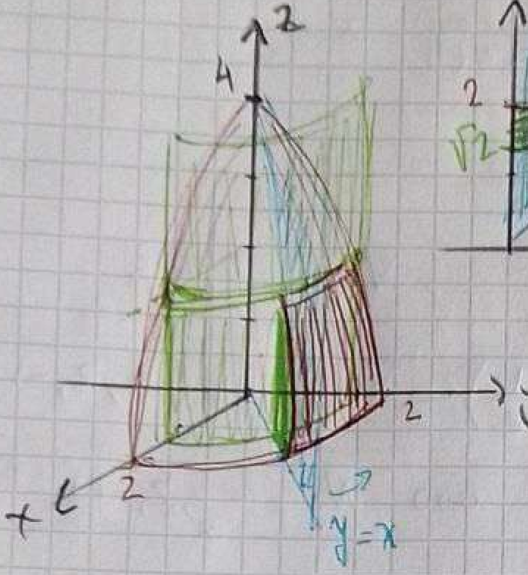
$\text{Área}_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$

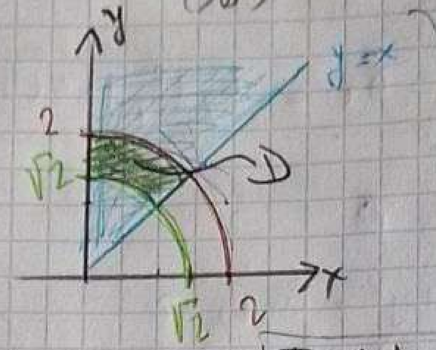
(P1) Expresar, mediante una integral múltiple la masa del sólido $H \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por

$z \leq 4 - x^2 - y^2$ $\quad$ $y \geq x$ $\quad$ $x^2+y^2 \geq 2$ $\quad$ 1° octante

siendo la densidad en cada punto proporcional a la distancia al eje $z$

$$\to \delta_{(x,y,z)} = k\sqrt{x^2+y^2}$$




$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$\delta(z,r,t) = k\,r$

Jac. $= r$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{2} &\leq r \leq 2 \\ 0 &\leq z \leq 4 - r^2 \end{aligned}}$$

$$\text{Masa} = \iiint_H \delta_{(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz \overset{\text{C.V.}}{=} \iiint_{H^*} \delta(z,r,t)\cdot \overset{\text{Jac}}{r}\,dr\,dz\,dt =$$

planteo integral

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{4-r^2} k\cdot r\,r\;dz\,dr\,dt =$$

$$= k\int_{\pi/4}^{\pi/2} dt \int_{\sqrt{2}}^{2} \underbrace{r^2(4-r^2)}_{4r^2-r^4}\,dr =$$

$$= k\,\frac{\pi}{4}\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\Big|_{\sqrt{2}}^{2}\right] = \frac{k\pi}{4}\left(\frac{64}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$\boxed{\text{Masa} = (16 - 5\sqrt{2})\,\frac{\pi}{15}}$$

(F2) Dada la sup. S de ec. $1 - x^2 - 3xz + y^2 - \ln(z) = z$, hallar (si es posible) los puntos donde el plano tangente a S en el punto $(0,1,z_0)$ corta a la curva C definida por: $y = x^2$, $z = 1 - 3x$

Hallo $z_0$: $1 - 0^2 - 3 \cdot 0 \cdot z_0 + 1^2 - \ln(z_0) = 2 \rightarrow \ln(z_0) = 0$

$\boxed{z_0 = 1}$

$\boxed{P = (0,1,1)}$

Defino parametrización de C:

$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1-3x \end{cases} \xrightarrow{x=t} \boxed{C: \gamma_{(t)} = (t, t^2, 1-3t)}$

Hallo plano tg. a S en P

$G_{(xyz)} = 1 - x^2 - 3xz + y^2 - \ln(z) - 2 \rightarrow \nabla G_{(P)} \parallel N_{S\,P}$

$\nabla G_{(xyz)} = \left(-2x - 3z,\ 2y,\ -3x - \frac{1}{z}\right) \rightarrow \boxed{\nabla G_{(0,1,1)} = (-3, 2, -1)}$

uso $\boxed{N_S = (-3, 2, -1)}$

$N \cdot (x,y,z) = N \cdot P$

$(-3,2,-1)(x,y,z) = (-3,2,-1)(0,1,1)$

$\boxed{-3x + 2y - z = 1}$ pl. tg = T

Hallo, si $\exists$, $T \cap C$: $-3x + 2y - z = 1$

$-3t + 2t^2 - (1-3t) = 1$

$2t^2 \cancel{-3t} - 1 \cancel{+3t} = 1 \rightarrow 2t^2 = 2$

$\underbrace{t^2 = 1 \rightarrow t = 1,\ t = -1}_{\exists\, T \cap C}$

$\boxed{P_1 = \gamma_{(1)} = (1, 1, -2)}$

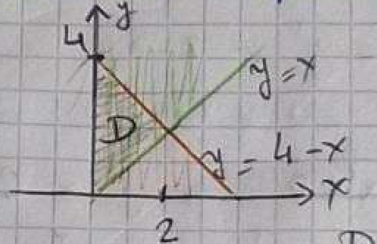
$\boxed{P_2 = \gamma_{(-1)} = (-1, 1, 4)}$

| AM II | Final | 3/3 <br> 3/12/24 |
|---|---|---|

P3) Dado $\bar{F}(x,y,z) = (y, \cos(z)+x, z-2xy)$ calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de la porción de sup $S$: $z = 4-x^2$ con $y \geq x$, $4-x \geq y$ en el 1° octante, con normal de tercera componente positiva

$G(x,y,z) = z-4+x^2$

$\boxed{N = (2x, 0, 1)}$ $\uparrow + \checkmark$




$0 \leq x \leq 2$
$x \leq y \leq 4-x$

Proyección en xy

$z = 4-x^2$

$$\iint_S \bar{F}\, d\sigma = \iint_D \bar{F}\cdot N\, dx\,dy = \iint_D (y, \cos(4-x^2)+x, 4-x^2-2xy)(2x,0,1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_D \cancel{2xy} + 4 - x^2 - \cancel{2xy}\; dx\,dy = \int_0^2\int_x^{4-x} 4-x^2\; dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 (4-x^2)(\underbrace{4-x-x}_{4-2x})\, dx = \int_0^2 (16-8x-4x^2+2x^3)\,dx = \boxed{\frac{40}{3} = \iint_S \bar{F}\, d\sigma}$$

(P4) Dados las familias de curvas de ecuaciones : $y = k x^4$ $\wedge$ $\varphi(x) + by^2 = c$, hallar el valor de "b" de modo que ambas familias resulten ortogonales sabiendo que $\varphi(x)$ es la curva de solución de $y'' - y' = 2 - 2x$ que pase por el origen con $y'(0) = 0$

hallo $\varphi$ : $y'' - y' = 2 - 2x$

SH) : $r^2 - r = 0 = r(r-1)$ $\to$ $r = 0$, $r = 1$ $\to$ $\boxed{y_H = A + Be^x}$ $A, B \in \mathbb{R}$

SP) : $y_p = Cx + D \to y' = C \quad y'' = 0$

$$\underbrace{\begin{aligned} y'' - y' &= -2x + 2 \\ 0 - C &= -2x + 2 \end{aligned}}_{\text{absurdo}}$$

$y_p = Cx^2 + Dx + E \to y' = 2Cx + D \to y'' = 2C$

$\to 2C - 2Cx - D = -2x + 2$

$-2C = -2 \to \boxed{C = 1}$ y $2C - D = 2 \to D = 0$

$\boxed{y_p = x^2}$

$y_G = A + Be^x + x^2 \to y' = Be^x + 2x$

$y(0) = 0 = A + B$

$y'(0) = 0 = B \to B = 0 \to A = 0$

$\boxed{y = x^2} : \varphi$

- $y = kx^4 \longrightarrow k = \dfrac{y}{x^4}$

$y' = k\,4x^3 = \dfrac{y}{x^4} \cdot 4x^3 \longrightarrow y' = \dfrac{4y}{x} \longrightarrow \boxed{y'_\perp = \dfrac{-x}{4y}}$ (1)

- $\varphi(x) + by^2 = c \longrightarrow \boxed{x^2 + by^2 = c}$ (2)

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{4y}$

$4y\,dy = -x\,dy$

$2y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + C_1$

$\dfrac{x^2}{2} + 2y^2 = C_1$

Solución de (1) tiene que ser del estilo de (2)

$\boxed{b = 4}$

$\boxed{x^2 + 4y^2 = C_2} \longleftarrow \dfrac{x^2 + 4y^2}{2} = C_1$

$2C_1 = C_2$